

Problemas analíticos

Fernando Greve

fgreve@gmail.com

Material complementario de *Análisis macroeconómico intermedio*, M. Villena, UTFSM, 2025.

Cada problema pide obtener un resultado en forma cerrada, firmar una derivada o caracterizar un caso límite. La secuencia es acumulativa: la restricción presupuestaria intertemporal genera la ecuación de Euler; la Euler genera la función de consumo CRRA; la función de consumo permite firmar la respuesta del ahorro a la tasa de interés; y de ahí se abren las tres extensiones del capítulo —ingreso permanente y política fiscal, inversión de la empresa y sostenibilidad de la deuda pública.

El documento está partido en dos: la **Parte I** contiene solo los enunciados y la **Parte II** los desarrollos completos. Cada problema enlaza con su desarrollo y viceversa. Intenta la derivación antes de pasar a la segunda parte.

RESULTADOS QUE SE DERIVAN

Ninguno se supone: todos aparecen demostrados en la Parte II.

Restricción intertemporal	$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r} \equiv W$
Ecuación de Euler	$u'(c_1) = \beta(1+r)u'(c_2)$
Regla de Keynes–Ramsey	$g_c \simeq (r - \rho)/\sigma$
Consumo CRRA	$c_1 = W/D, \quad D = 1 + \beta^{1/\sigma}(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}$
Slutsky con dotación	$\frac{\partial c_1}{\partial p_2} = \frac{\partial h_1}{\partial p_2} + (y_2 - c_2)\frac{\partial c_1}{\partial m}$
PIH con ingreso AR(1)	$\text{PMC}(\rho) = r/(1+r-\rho)$
Restricción del gobierno	$T_1 + \frac{T_2}{1+r} = G_1 + \frac{G_2}{1+r}$
Activación de la cota de crédito	$y_2/y_1 > [\beta(1+r)]^{1/\sigma}$
Costo de uso con impuestos	$uc = (r + \delta)(1 - \tau_z)/(1 - \tau)$
Regla de inversión de Tobin	$I/K = (q - 1)/\varphi$
Dinámica de la deuda	$b_{t+1} = \theta b_t - sp, \quad \theta = (1+r)/(1+g)$
Superávit estabilizador	$sp^* = \frac{r-g}{1+g} b$

Parte I Enunciados

PROBLEMA 1

RPI · ENVOLVENTE

La restricción intertemporal y el signo del efecto de r sobre el bienestar

Desarrollo en la página 6.

Un hogar vive dos períodos con dotación exógena (y_1, y_2) y accede a un mercado de capitales perfecto a la tasa real r . Sus preferencias son $U = u(c_1) + \beta u(c_2)$, con $u' > 0$ y $u'' < 0$.

$$\max_{c_1, c_2} u(c_1) + \beta u(c_2) \quad \text{s.a.} \quad c_2 = y_2 + (1+r)(y_1 - c_1)$$

- Deriva la restricción presupuestaria intertemporal y define la riqueza $W(r)$. Calcula y firma $\partial W / \partial r$.
- Demuestra que la dotación es alcanzable cualquiera sea r , y deduce qué le ocurre geoméricamente a la recta presupuestaria cuando r cambia.
- Sea $V(r)$ la utilidad indirecta. Usando el teorema de la envolvente, obtén dV/dr y demuestra que su signo es el signo del ahorro.
- Concilia (a) y (c): la riqueza cae con r pero el bienestar de un acreedor sube. ¿Hay contradicción?

PROBLEMA 2

EULER · KEYNES–RAMSEY

Ecuación de Euler con utilidad general y su forma log-linealizada

Desarrollo en la página 7.

Mantén el problema anterior, con u general, y escribe el factor de descuento como $\beta = 1/(1+\rho)$, donde ρ es la tasa de preferencia temporal.

$$\sigma(c) \equiv -\frac{u''(c)c}{u'(c)} \quad (\text{aversión relativa al riesgo; su inverso } 1/\sigma \text{ es la EIS}) \quad g_c \equiv \ln c_2 - \ln c_1$$

- Deriva la ecuación de Euler y explica por qué es una condición de *no arbitraje* intertemporal.
- Demuestra que el signo de $c_2 - c_1$ queda determinado por la comparación entre $\beta(1+r)$ y 1, sin conocer la forma funcional de u .
- Log-lineariza la ecuación de Euler para obtener la regla de Keynes–Ramsey $g_c \simeq (r - \rho)/\sigma$.
- Bajo incertidumbre y utilidad cuadrática con $\beta(1+r) = 1$, demuestra que el consumo sigue un martingala (resultado de Hall).

PROBLEMA 3

CRRA · CASOS LÍMITE

Solución cerrada CRRA, linealidad de la función de consumo y sus límites

Desarrollo en la página 8.

Especializa las preferencias a la familia CRRA, la única compatible con crecimiento balanceado.

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} \quad (\sigma > 0, \sigma \neq 1); \quad u(c) = \ln c \quad (\sigma = 1)$$

- Obtén la función de consumo $c_1(W, r)$ en forma cerrada.
- Demuestra que la propensión marginal a consumir de la riqueza es independiente de W , y explica la consecuencia para la agregación entre hogares.
- Verifica que $\sigma \rightarrow 1$ recupera el caso logarítmico.
- Analiza los límites $\sigma \rightarrow \infty$ y $\sigma \rightarrow 0$ e interpreta cada uno.

PROBLEMA 4

SLUTSKY CON DOTACIÓN

El signo de $\partial s / \partial r$: descomposición exacta de ingreso y sustitución

Desarrollo en la página 9.

Trata el problema como una demanda de dos bienes con precios $p_1 = 1$ y $p_2 = 1/(1+r)$ y una **dotación** (y_1, y_2) en lugar de un ingreso monetario fijo.

$$m(p) = y_1 + p_2 y_2 \quad (\text{ingreso valorado a precios de mercado}) \quad h_i(p, U) \text{ hicksianas, } c_i(p, m) \text{ marshallianas}$$

- Escribe la identidad de Slutsky con dotación y explica por qué difiere de la versión con ingreso exógeno.
- Deriva $\partial s_1 / \partial r$ y firma cada término por separado.
- Demuestra que para un deudor el efecto total sobre el ahorro es inequívocamente positivo, mientras que para un acreedor es ambiguo.
- Particulariza a CRRA y obtén la condición exacta, en términos de σ , bajo la cual el ahorro *cae* cuando sube la tasa.

PROBLEMA 5

INGRESO PERMANENTE

La propensión marginal a consumir como función de la persistencia del ingreso

Desarrollo en la página 11.

Extiende a horizonte infinito con previsión perfecta, tasa constante y la condición de paciencia $\beta(1+r) = 1$, de modo que el consumo óptimo es constante.

$$\sum_{j \geq 0} \frac{c_{t+j}}{(1+r)^j} = A_t + \sum_{j \geq 0} \frac{y_{t+j}}{(1+r)^j} \equiv W_t \quad \text{No-Ponzi: } \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A_{t+T}}{(1+r)^T} = 0$$

- Deriva la función de consumo $c_t = \frac{r}{1+r} W_t$ y comenta el rol de la condición de no-Ponzi.
- Obtén analíticamente la PMC ante un shock puramente transitorio y ante uno permanente.
- Supón que el ingreso sigue un AR(1), $y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$ con $\rho \in [0, 1]$. Deriva la PMC como función de ρ y verifica que anida los dos casos anteriores.
- Demuestra que $\partial \text{PMC} / \partial \rho > 0$ y discute qué implica para el multiplicador fiscal de una transferencia.

PROBLEMA 6

POLÍTICA FISCAL

Equivalencia ricardiana: enunciado, demostración y condiciones de ruptura

Desarrollo en la página 12.

Un gobierno gasta (G_1, G_2) , cobra impuestos de **suma alzada** (T_1, T_2) y puede emitir deuda. El hogar es el de los problemas 1–3, ahora con ingreso disponible.

$$\text{Gobierno: } T_1 + \frac{T_2}{1+r} = G_1 + \frac{G_2}{1+r} \quad \text{Hogar: } W = (y_1 - T_1) + \frac{y_2 - T_2}{1+r}$$

- Demuestra que W depende de la trayectoria del gasto pero no de la de los impuestos.
- Demuestra que ante una rebaja tributaria financiada con deuda el ahorro privado sube exactamente lo que cae el ahorro público, y que el ahorro nacional no cambia.
- Rompe el supuesto de horizonte infinito: el hogar internaliza solo una fracción $\theta \in [0, 1]$ de los impuestos futuros. Deriva dc_1 y muestra que la equivalencia es el caso $\theta = 1$.
- Rompe el supuesto de mercados completos: el hogar tiene una restricción de endeudamiento activa. ¿Cuánto vale ahora dc_1 ?

PROBLEMA 7

RESTRICCIÓN DE LIQUIDEZ

Condiciones de Kuhn–Tucker y la condición exacta de activación

Desarrollo en la página 13.

Impón que el hogar no puede endeudarse: $s_1 \geq 0$. Todo lo demás igual al problema 3 (CRRA).

$$\max u(c_1) + \beta u(c_2) \quad \text{s.a.} \quad c_2 = y_2 + (1+r)(y_1 - c_1), \quad c_1 \leq y_1$$

- Plantea las condiciones de Kuhn–Tucker y escribe la ecuación de Euler como *desigualdad*.
- Deriva la condición exacta, en parámetros primitivos, bajo la cual la restricción se activa. Interpretála.
- Obtén el multiplicador y muestra que es el precio sombra del crédito.
- Deriva la PMC del hogar restringido y la PMC agregada de una economía con una fracción λ de hogares restringidos. Discute el “exceso de sensibilidad”.

PROBLEMA 8

INVERSIÓN · COSTO DE USO

Costo de uso del capital: arbitraje, impuestos y elasticidad de K^*

Desarrollo en la página 14.

Una firma competitiva produce con $F(K)$, cóncava, y el capital se deprecia a tasa δ . El precio del capital es p_K y puede variar en el tiempo.

$$\tau = \text{tasa de impuesto a las utilidades} \quad z \in [0, 1] = \text{valor presente de las depreciaciones tributarias por peso invertido}$$

- (a) Deriva el costo de uso del capital a partir de una condición de arbitraje entre poseer capital y poseer un bono.
- (b) Incorpora el impuesto a las utilidades con depreciación acelerada y obtén $uc(\tau, z)$. Firma $\partial uc / \partial \tau$ y encuentra el valor de z que hace al impuesto neutral.
- (c) Con $F(K) = AK^\alpha$, obtén K^* y su elasticidad respecto al costo de uso. ¿De qué depende esa elasticidad?
- (d) Demuestra que este modelo no determina la *tasa* de inversión, y explica por qué eso es un problema empírico.

PROBLEMA 9

 q DE TOBIN**Costos de ajuste, la ecuación de q y el teorema de Hayashi**

Desarrollo en la página 16.

Reformula la decisión de inversión como un problema dinámico de control óptimo en tiempo continuo, con un costo de ajuste convexo que penaliza invertir rápido.

$$V(K_0) = \max_{\{I\}} \int_0^\infty e^{-rt} [F(K) - I - \Phi(I, K)] dt \quad \text{s.a. } \dot{K} = I - \delta K, \quad \Phi(I, K) = \frac{\varphi}{2} \left(\frac{I}{K} \right)^2 K$$

- (a) Plantea el hamiltoniano de valor presente y deriva la condición de primer orden para I . Interpreta la variable de coestado.
- (b) Deriva la ecuación de movimiento de q y muestra que q es el valor presente de los productos marginales futuros.
- (c) Caracteriza el estado estacionario y verifica que con $\delta = 0$ se recupera $q = 1$ y $F'(K) = r$.
- (d) Enuncia y explica el teorema de Hayashi: ¿bajo qué condiciones la q marginal (no observable) coincide con la q media (observable)?

PROBLEMA 10

SOSTENIBILIDAD FISCAL · §7.6

Dinámica de la deuda: solución, estabilidad y condición de solvencia

Desarrollo en la página 17.

Sea $b_t = B_t / Y_t$ la deuda como razón del PIB y sp_t el superávit primario, también como razón del PIB.

$$B_{t+1} = (1 + r)B_t - SP_{t+1}, \quad Y_{t+1} = (1 + g)Y_t, \quad \theta \equiv \frac{1 + r}{1 + g}$$

- (a) Deriva la ecuación en diferencias de b_t y su aproximación en tiempo continuo.
- (b) Resuelve la ecuación lineal en diferencias con sp constante: obtén el punto fijo b^* y la trayectoria explícita.
- (c) Caracteriza la estabilidad y deriva el superávit primario que estabiliza la deuda en un nivel dado.
- (d) Itera hacia adelante para obtener la condición de solvencia intertemporal, y discute qué ocurre con ella cuando $r < g$.

Parte II Desarrollos

DESARROLLO 1

RPI · ENVOLVENTE

La restricción intertemporal y el signo del efecto de r sobre el bienestar

Enunciado en la página 2.

(a) De flujo a valor presente

El ahorro es $s_1 = y_1 - c_1$ y el segundo período agota recursos, $c_2 = y_2 + (1 + r)s_1$. Despejando s_1 y dividiendo por $(1 + r)$:

$$c_1 + \frac{c_2}{1 + r} = y_1 + \frac{y_2}{1 + r} \equiv W(r).$$

Solo importa el *valor presente* del perfil de ingreso, no su calendario. Derivando,

$$\frac{\partial W}{\partial r} = -\frac{y_2}{(1 + r)^2} < 0$$

siempre que $y_2 > 0$: subir la tasa descuenta más fuerte el ingreso futuro y reduce la riqueza medida en unidades de consumo presente.

(b) El punto de dotación es un ancla

Evaluando la restricción en $c_1 = y_1$, $c_2 = y_2$ se obtiene una identidad: la dotación la satisface **para todo** r , porque corresponde a $s_1 = 0$ y el ahorro nulo no paga ni recibe intereses.

La recta presupuestaria, de pendiente $-(1 + r)$, **pivota alrededor de** (y_1, y_2) . No se desplaza paralelamente: un alza de r expande el conjunto factible del lado del ahorro ($c_1 < y_1$) y lo contrae del lado del endeudamiento ($c_1 > y_1$).

(c) Teorema de la envolvente

Escribe el lagrangiano con la restricción intertemporal:

$$\mathcal{L} = u(c_1) + \beta u(c_2) + \lambda \left[y_1 + \frac{y_2}{1 + r} - c_1 - \frac{c_2}{1 + r} \right].$$

Por la envolvente, $dV/dr = \partial \mathcal{L} / \partial r$ evaluado en el óptimo, tratando los c como constantes:

$$\frac{dV}{dr} = \lambda \left[-\frac{y_2}{(1 + r)^2} + \frac{c_2}{(1 + r)^2} \right] = \lambda \frac{c_2 - y_2}{(1 + r)^2}.$$

Pero $c_2 - y_2 = (1 + r)s_1$ por la restricción de flujo, de modo que

$$\frac{dV}{dr} = \lambda \frac{s_1}{1 + r}, \quad \lambda = u'(c_1) > 0.$$

$\text{sign}(dV/dr) = \text{sign}(s_1)$. El acreedor neto gana con un alza de la tasa, el deudor neto pierde, y quien está exactamente en su dotación es indiferente a primer orden.

(d) Por qué no hay contradicción

Ambos resultados miden cosas distintas. W valora la dotación *a los precios nuevos*: es un número expresado en unidades de c_1 , y esas unidades se encarecieron. La utilidad, en cambio, no depende del numerario. Formalmente, el efecto sobre el bienestar combina la caída de W con el abaratamiento de c_2 , y el neto es proporcional a la posición neta s_1 —que es exactamente lo que dice la identidad de Slutsky con dotación del problema 4.

LECTURA ECONÓMICA

Este es el resultado que ordena todo el capítulo: frente a un cambio de tasa, **lo único que importa para el bienestar es si el agente es prestamista o prestatario**. Aplicado a la política monetaria, dice que una subida de tasas redistribuye desde deudores (típicamente hogares jóvenes y endeudados, con PMC alta) hacia acreedores (hogares mayores, con PMC baja), y esa redistribución —no solo el efecto sustitución— es parte del mecanismo de transmisión.

DESARROLLO 2

EULER · KEYNES–RAMSEY

Ecuación de Euler con utilidad general y su forma log-linealizada

Enunciado en la página 2.

(a) Condición de primer orden

Sustituyendo la restricción de flujo, el problema queda en una variable:

$$\max_{c_1} u(c_1) + \beta u(y_2 + (1+r)(y_1 - c_1)) \quad \Rightarrow \quad u'(c_1) = \beta(1+r)u'(c_2).$$

Lectura de no arbitraje: sacrificar un peso hoy cuesta $u'(c_1)$ de utilidad y rinde $(1+r)$ pesos mañana, que valen $\beta u'(c_2)$ cada uno. En el óptimo, la desviación marginal no puede mejorar nada; es la misma lógica que reaparece como condición de valoración de activos en el CCAPM del capítulo 8.

(b) El signo de la pendiente del consumo

Reescribe como $u'(c_1)/u'(c_2) = \beta(1+r)$. Como $u'' < 0$, u' es estrictamente decreciente, luego

$$u'(c_1) \geq u'(c_2) \iff c_1 \leq c_2.$$

$\beta(1+r) > 1 \Rightarrow c_2 > c_1$ (perfil creciente): el mercado paga más de lo que el hogar exige por esperar.
 $\beta(1+r) < 1 \Rightarrow c_2 < c_1$. Y $\beta(1+r) = 1 \Rightarrow c_1 = c_2$: suavizamiento perfecto, sea cual sea la forma de u y sea cual sea el perfil de ingresos.

(c) Log-linealización

Tomando logaritmos en la Euler, $\ln u'(c_1) - \ln u'(c_2) = \ln(1+r) - \ln(1+\rho)$. Por definición de σ , la elasticidad de la utilidad marginal es

$$\frac{d \ln u'(c)}{d \ln c} = \frac{u''(c)c}{u'(c)} = -\sigma(c) \quad \Rightarrow \quad \ln u'(c_1) - \ln u'(c_2) \simeq \sigma(\ln c_2 - \ln c_1),$$

y usando $\ln(1+x) \simeq x$ para r, ρ pequeños:

$$g_c \simeq \frac{1}{\sigma} (r - \rho).$$

Los tres ingredientes quedan separados: el consumo crece si el mercado premia la paciencia ($r > \rho$), y la magnitud de esa respuesta la gobierna la $EIS = 1/\sigma$, no σ .

(d) El martingala de Hall

Con utilidad cuadrática $u(c) = c - \frac{a}{2}c^2$, la utilidad marginal es **lineal**, $u'(c) = 1 - ac$. Bajo incertidumbre la Euler es $u'(c_t) = \beta(1+r)\mathbb{E}_t[u'(c_{t+1})]$, y con $\beta(1+r) = 1$:

$$1 - ac_t = \mathbb{E}_t[1 - ac_{t+1}] \quad \implies \quad c_t = \mathbb{E}_t[c_{t+1}].$$

El consumo es un **paseo aleatorio**: $c_{t+1} = c_t + \varepsilon_{t+1}$ con $\mathbb{E}_t \varepsilon_{t+1} = 0$. Ninguna variable conocida en t —incluido el ingreso futuro esperado— puede predecir el cambio del consumo.

La linealidad de u' es esencial: si $u''' > 0$ (prudencia), la desigualdad de Jensen introduce un término de **ahorro precautorio** y el martingala se rompe.

LECTURA ECONÓMICA

La Euler no determina el *nivel* del consumo sino su *inclinación*; el nivel lo fija la riqueza a través de la restricción. Esa separación —pendiente por Euler, nivel por la restricción— es el algoritmo que resuelve todos los modelos intertemporales del curso. Y el corolario de Hall convirtió la teoría del consumo en una hipótesis contrastable: basta correr una regresión de Δc contra información pasada.

DESARROLLO 3

CRRA · CASOS LÍMITE

Solución cerrada CRRA, linealidad de la función de consumo y sus límites

Enunciado en la página 2.

(a) Función de consumo

Con $u'(c) = c^{-\sigma}$, la Euler $c_1^{-\sigma} = \beta(1+r)c_2^{-\sigma}$ da la razón de consumos $c_2/c_1 = [\beta(1+r)]^{1/\sigma}$. Sustituyendo en la restricción $c_1 + c_2/(1+r) = W$:

$$c_1 \left\{ 1 + \frac{[\beta(1+r)]^{1/\sigma}}{1+r} \right\} = W \quad \implies \quad \boxed{c_1 = \frac{W}{D(r)}, \quad D(r) \equiv 1 + \beta^{1/\sigma}(1+r)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}.}$$

El exponente $(1-\sigma)/\sigma$ decide todo lo que sigue: positivo si $\sigma < 1$, nulo si $\sigma = 1$, negativo si $\sigma > 1$.

(b) Linealidad y agregación

$$\frac{\partial c_1}{\partial W} = \frac{1}{D(r)}, \quad \frac{\partial^2 c_1}{\partial W^2} = 0.$$

La función de consumo es **lineal en la riqueza y sin intercepto**, con pendiente que depende de (β, σ, r) pero no de W .

Si todos los hogares comparten (β, σ) y enfrentan el mismo r , entonces $\sum_i c_1^i = \frac{1}{D} \sum_i W^i$: el consumo agregado depende de la **riqueza agregada** y no de su distribución, y existe un hogar representativo exacto. Esta propiedad se pierde en cuanto hay restricciones de liquidez (problema 7): con funciones de consumo cóncavas y quebradas, la distribución vuelve a importar.

(c) El límite logarítmico

Si $\sigma = 1$, el exponente $(1 - \sigma)/\sigma = 0$ y por tanto $(1 + r)^0 = 1$:

$$D = 1 + \beta \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{W}{1 + \beta}, \text{ independiente de } r \text{ dado } W.$$

Formalmente, $c^{1-\sigma}/(1 - \sigma)$ converge a $\ln c$ salvo una constante aditiva cuando $\sigma \rightarrow 1$, que no altera el óptimo.

(d) Los dos extremos

$\sigma \rightarrow \infty$ (**EIS** $\rightarrow 0$): $[\beta(1 + r)]^{1/\sigma} \rightarrow 1$, luego $c_2/c_1 \rightarrow 1$ y

$$D \rightarrow 1 + \frac{1}{1 + r} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = \frac{W(1 + r)}{2 + r}.$$

Suavizamiento perfecto: el hogar rehúsa cualquier inclinación del perfil, por atractiva que sea la tasa. Es el caso de Leontief intertemporal.

$\sigma \rightarrow 0$ (**utilidad casi lineal**, **EIS** $\rightarrow \infty$): el término $[\beta(1 + r)]^{1/\sigma}$ diverge o se anula según el signo de $\beta(1 + r) - 1$:

CASO	LÍMITE DE D	COMPORTAMIENTO
$\beta(1 + r) > 1$	$\rightarrow \infty$	$c_1 \rightarrow 0$: ahorra todo, consume solo en $t = 2$
$\beta(1 + r) < 1$	$\rightarrow 1$	$c_1 \rightarrow W$: consume todo hoy, se endeuda al máximo

Solución **bang-bang**: sin curvatura no hay deseo de suavizar y el hogar se va a una esquina. La concavidad de u es exactamente lo que genera consumo interior en ambos períodos.

LECTURA ECONÓMICA

σ hace doble trabajo en esta familia: mide la aversión al riesgo (dimensión de estados) y el inverso de la disposición a sustituir en el tiempo (dimensión temporal). Que un solo parámetro gobierne ambas cosas es una restricción fuerte, y es la raíz del *equity premium puzzle* del capítulo 8: los σ altos que se necesitan para explicar la prima por riesgo implican, aquí, hogares que casi no aceptan inclinar su consumo. Las preferencias de Epstein–Zin existen precisamente para separar ambos roles.

DESARROLLO 4**SLUTSKY CON DOTACIÓN****El signo de $\partial s/\partial r$: descomposición exacta de ingreso y sustitución**

Enunciado en la página 3.

(a) Slutsky con dotación

Cuando el ingreso proviene de vender una dotación, m es endógeno a los precios: $\partial m/\partial p_2 = y_2$. Derivando $c_1(p, m(p))$ y combinando con la Slutsky habitual:

$$\frac{\partial c_1}{\partial p_2} = \frac{\partial h_1}{\partial p_2} + (y_2 - c_2) \frac{\partial c_1}{\partial m}.$$

La diferencia con el caso de ingreso exógeno es el factor $(y_2 - c_2)$ en vez de $(-c_2)$: el agente es simultáneamente comprador y vendedor del bien 2, y solo su **posición neta** genera efecto ingreso. Un agente en autarquía ($c_2 = y_2$) no tiene efecto ingreso en absoluto.

(b) Pasando a la tasa de interés

Como $p_2 = 1/(1+r)$, $dp_2/dr = -1/(1+r)^2$. Además, de la restricción de flujo, $y_2 - c_2 = -(1+r)s_1$. Sustituyendo y usando $ds_1/dr = -dc_1/dr$:

$$\frac{\partial s_1}{\partial r} = \underbrace{\frac{1}{(1+r)^2} \frac{\partial h_1}{\partial p_2}}_{\text{sustitución}} - \underbrace{\frac{s_1}{1+r} \frac{\partial c_1}{\partial m}}_{\text{ingreso}}.$$

TÉRMINO	SIGNO	MECANISMO
Sustitución	≥ 0 siempre	Con dos bienes la matriz de Slutsky es simétrica y semidefinida negativa, de modo que el efecto cruzado hicksiano $\partial h_1/\partial p_2 \geq 0$: al abaratare c_2 (subir r) se sustituye c_1 por c_2 y el ahorro sube.
Ingreso	signo de $-s_1$	Con c_1 normal ($\partial c_1/\partial m > 0$), un acreedor ($s_1 > 0$) se enriquece y consume más hoy: ahorra menos. Un deudor se empobrece y debe ahorrar más.

(c) Deudores frente a acreedores

Si $s_1 < 0$ (deudor), ambos términos son positivos: $\partial s_1/\partial r > 0$ inequívocamente. Si $s_1 > 0$ (acreedor), los términos se oponen y el signo es **ambiguo**: depende de si la sustituibilidad intertemporal supera al efecto riqueza sobre su posición acreedora.

Corolario agregado: en una economía cerrada el ahorro neto agregado es cero por construcción, así que el efecto ingreso se cancela entre deudores y acreedores y solo sobrevive el término de sustitución. La ambigüedad es un fenómeno **individual**, no agregado —salvo que las EIS difieran sistemáticamente entre deudores y acreedores, que es justamente lo que ocurre por edad y riqueza.

(d) El umbral CRRA

Con $c_1 = W/D$ y $D = 1 + \beta^{1/\sigma}(1+r)^{(1-\sigma)/\sigma}$, define $\omega \equiv (D-1)/D = 1 - c_1/W \in (0, 1)$, la fracción de la riqueza destinada al segundo período. Derivando logarítmicamente,

$$\frac{d \ln c_1}{dr} = \frac{\partial \ln W}{\partial r} - \frac{1}{D} \frac{dD}{dr} = -\frac{y_2}{(1+r)^2 W} - \frac{1-\sigma}{\sigma} \cdot \frac{\omega}{1+r},$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial r} = c_1 \left[\frac{y_2}{(1+r)^2 W} + \frac{1-\sigma}{\sigma} \cdot \frac{\omega}{1+r} \right].$$

El primer término (efecto riqueza por descuento) es siempre positivo; el segundo cambia de signo en $\sigma = 1$. Multiplicando por $(1+r)/c_1$ y reordenando, el ahorro cae si y solo si

$$\frac{\sigma-1}{\sigma} \omega > \frac{y_2}{(1+r)W}.$$

El lado derecho es la **fracción de la riqueza que proviene del ingreso futuro**. Se sigue de inmediato que (i) con $\sigma \leq 1$ la condición nunca se cumple y el ahorro siempre sube; y (ii) con $\sigma > 1$ se cumple más fácilmente cuando el ingreso futuro pesa poco en la riqueza —es decir, para un hogar en su etapa de acumulación, que es exactamente el acreedor del punto (c).

LECTURA ECONÓMICA

La elasticidad-interés del ahorro es de signo teóricamente indeterminado, y esto no es un tecnicismo: es la razón por la cual la evidencia empírica sobre si subir la tasa “estimula el ahorro” es tan poco concluyente, y por la cual el diseño de incentivos tributarios al ahorro previsional es debatible. La misma ambigüedad reaparece en el capítulo 9, donde la tasa de ahorro óptima del hogar se compara con la regla de oro.

DESARROLLO 5**INGRESO PERMANENTE****La propensión marginal a consumir como función de la persistencia del ingreso**

Enunciado en la página 3.

(a) Función de consumo

Si c es constante, el lado izquierdo es una serie geométrica: $c \sum_{j \geq 0} (1+r)^{-j} = c(1+r)/r$. Igualando a W_t :

$$c_t = \frac{r}{1+r} W_t.$$

El hogar convierte su riqueza en una **anualidad perpetua**: consume el flujo permanente que su riqueza puede sostener para siempre. La condición de no-Ponzi es la que hace válida la restricción intertemporal en horizonte infinito; sin ella el hogar podría refinanciar su deuda indefinidamente y consumir sin límite, y el problema no tendría solución.

(b) Los dos casos polares

Todo pasa por ΔW , porque la PMC de la riqueza es fija:

SHOCK	ΔW	Δc
Transitorio: Δy solo en t	Δy	$\frac{r}{1+r} \Delta y$
Permanente: Δy en todo $j \geq 0$	$\frac{1+r}{r} \Delta y$	Δy

La PMC del ingreso corriente va de $r/(1+r)$ —casi cero para r pequeño— hasta 1. **No es un parámetro estructural**: depende de la naturaleza del shock.

(c) El caso intermedio: AR(1)

Con $\mathbb{E}_t y_{t+j} = \rho^j y_t$, la riqueza humana es otra geométrica de razón $\rho/(1+r) < 1$:

$$W_t = \sum_{j \geq 0} \frac{\rho^j y_t}{(1+r)^j} = y_t \frac{1+r}{1+r-\rho} \quad \Rightarrow \quad c_t = \frac{r}{1+r-\rho} y_t, \quad \text{PMC}(\rho) = \frac{r}{1+r-\rho}.$$

Los anidamientos se verifican de inmediato: $\rho = 0$ da $r/(1+r)$ (transitorio) y $\rho = 1$ da $r/r = 1$ (permanente).

(d) Monotonía e implicancias

$$\frac{\partial \text{PMC}}{\partial \rho} = \frac{r}{(1+r-\rho)^2} > 0.$$

La PMC es creciente y **convexa** en ρ : casi plana para persistencias bajas y disparándose cerca de $\rho = 1$.

Implicancia fiscal: una transferencia **por una vez** ($\rho = 0$) tiene una PMC casi nula bajo el PIH, y por tanto un multiplicador casi nulo. Para que una política de transferencias mueva el consumo hace falta, o bien que sea percibida como permanente (ρ alto), o bien que los hogares no estén en el mundo del PIH —que es la puerta del problema 7.

LECTURA ECONÓMICA

El PIH no predice una PMC baja: predice que **la PMC es igual a la fracción del shock que es permanente**. Por eso las estimaciones empíricas varían tanto entre episodios, y por eso identificar la persistencia percibida del shock es tan importante como estimar la PMC misma. La contracara econométrica es el resultado de Hall del problema 2: bajo el PIH solo las innovaciones mueven el consumo, así que la información anticipada no debería tener poder predictivo.

DESARROLLO 6

POLÍTICA FISCAL

Equivalencia ricardiana: enunciado, demostración y condiciones de ruptura

Enunciado en la página 4.

(a) El teorema

Sustituye la restricción del gobierno en la del hogar. Agrupando los impuestos:

$$W = y_1 + \frac{y_2}{1+r} - \left[G_1 + \frac{G_2}{1+r} \right].$$

La riqueza del hogar depende del **valor presente del gasto público** y no de cómo se financie. Cualquier reforma que mantenga fijo $\{G_t\}$ y solo reordene $\{T_t\}$ deja W —y por tanto c_1 , c_2 y la tasa de interés de equilibrio— exactamente igual. **La deuda pública no es riqueza neta.**

(b) La contabilidad del ahorro

Considera $dT_1 = -\Delta$ financiado con deuda; la restricción del gobierno exige $dT_2 = (1+r)\Delta$. Entonces

$$\begin{aligned} d(\text{ahorro privado}) &= d(y_1 - T_1 - c_1) = +\Delta, \\ d(\text{ahorro público}) &= d(T_1 - G_1) = -\Delta, \\ d(\text{ahorro nacional}) &= 0. \end{aligned}$$

El hogar ahorra íntegramente la rebaja porque anticipa el impuesto futuro y necesita exactamente $(1+r)\Delta$ en $t = 2$ para pagarlo. La demanda privada de bonos absorbe la oferta pública sin mover la tasa.

(c) Ruptura I: incidencia parcial de los impuestos futuros

Si el hogar espera pagar solo θT_2 (muere antes, o la carga recae sobre generaciones futuras a las que no es altruista), su riqueza es $W = (y_1 - T_1) + (y_2 - \theta T_2)/(1+r)$. Diferenciando la reforma anterior:

$$dW = \Delta - \frac{\theta(1+r)\Delta}{1+r} = (1-\theta)\Delta \quad \implies \quad dc_1 = \frac{\partial c_1}{\partial W} dW = \frac{(1-\theta)\Delta}{D(r)}.$$

Con utilidad logarítmica, $D = 1 + \beta$. La equivalencia es el caso $\theta = 1$; el extremo $\theta = 0$ (el hogar no pagará nada) reproduce el keynesianismo ingenuo con $PMC = 1/D$.

Este es el argumento de Barro: el legado altruista *restaura* $\theta = 1$, porque el hogar que se preocupa por la utilidad de sus hijos internaliza los impuestos que ellos pagarán y ajusta la herencia. La equivalencia sobrevive al horizonte finito, pero no a la ausencia de altruismo operativo —por ejemplo, si la restricción de herencia no negativa está activa.

(d) Ruptura II: restricción de endeudamiento activa

Si el hogar está en la esquina $c_1 = y_1 - T_1$ (problema 7), su consumo ya no lo determina W sino su **liquidez corriente**:

$$dc_1 = \Delta \quad \Rightarrow \quad \text{PMC} = 1.$$

La rebaja tributaria es justamente el préstamo que el mercado le negaba: el gobierno se endeuda por cuenta del hogar, a una tasa a la que el hogar no tenía acceso. Aquí la política fiscal es máximamente potente, y lo es **precisamente porque** el mercado de capitales es imperfecto.

LECTURA ECONÓMICA

La equivalencia ricardiana no es una descripción del mundo sino un **punto de referencia** que identifica qué supuestos hacen irrelevante el financiamiento: suma alzada, mercados perfectos, horizonte efectivamente infinito y ausencia de incertidumbre sobre la incidencia. Cada supuesto que falla apunta a un canal por el cual la política fiscal *sí* funciona, y a un criterio de focalización: las transferencias son más potentes donde θ es bajo o donde la restricción de liquidez está activa.

DESARROLLO 7

RESTRICCIÓN DE LIQUIDEZ

Condiciones de Kuhn–Tucker y la condición exacta de activación

Enunciado en la página 4.

(a) Kuhn–Tucker

$$\mathcal{L} = u(c_1) + \beta u(y_2 + (1+r)(y_1 - c_1)) + \mu(y_1 - c_1).$$

Las condiciones son $\partial \mathcal{L} / \partial c_1 = 0$, $\mu \geq 0$, $y_1 - c_1 \geq 0$ y la holgura complementaria $\mu(y_1 - c_1) = 0$:

$$u'(c_1) - \beta(1+r)u'(c_2) = \mu \geq 0.$$

La Euler pasa de igualdad a **desigualdad débil**: el hogar quisiera trasladar consumo del futuro al presente, pero no puede. Si $s_1 > 0$ entonces $\mu = 0$ y se recupera la Euler estándar.

(b) Cuándo muere

La restricción se activa si y solo si el óptimo irrestricto viola la cota, $c_1^* > y_1$. Con $c_1^* = W/D$:

$$\frac{W}{D} > y_1 \iff y_1 + \frac{y_2}{1+r} > Dy_1 \iff \frac{y_2}{1+r} > (D-1)y_1,$$

y como $D-1 = \beta^{1/\sigma}(1+r)^{(1-\sigma)/\sigma}$, al multiplicar por $(1+r)$ el resultado colapsa:

$$\frac{y_2}{y_1} > [\beta(1+r)]^{1/\sigma} = \frac{c_2^*}{c_1^*}.$$

Interpretación exacta: **la restricción muerde cuando el ingreso crece más rápido que lo que el hogar querría que creciera su consumo**. El lado derecho es precisamente la pendiente deseada del perfil de consumo que entrega la ecuación de Euler.

Corolarios inmediatos por estática comparativa: la condición se cumple más fácilmente cuanto (i) más empinado el perfil de ingreso —jóvenes, estudiantes, migrantes recientes—; (ii) más impaciente el hogar (β bajo); (iii) menor la tasa de interés; y (iv) mayor σ , porque el hogar desea un perfil más plano y por tanto necesita endeudarse más.

(c) El precio sombra

En la esquina, $c_1 = y_1$ y $c_2 = y_2$, de modo que

$$\mu = u'(y_1) - \beta(1+r)u'(y_2) = y_1^{-\sigma} - \beta(1+r)y_2^{-\sigma} > 0.$$

μ es la ganancia de utilidad de relajar la restricción en un peso: el hogar pagaría hasta $\mu/u'(y_1)$ pesos por acceder a esa unidad de crédito. Nota que $\mu > 0$ es *equivalente* a la condición de (b), reordenando.

(d) PMC y exceso de sensibilidad

Ante una transferencia transitoria τ pequeña, el hogar restringido sigue en la esquina (la condición de activación es una desigualdad estricta y se mantiene por continuidad), luego $c_1 = y_1 + \tau$:

$$\text{PMC}^{\text{restringido}} = 1 \quad \text{frente a} \quad \text{PMC}^{\text{libre}} = \frac{1}{D(r)}.$$

Con una fracción λ de hogares restringidos, la PMC agregada es el promedio ponderado

$$\text{PMC}^{\text{agregada}} = \lambda \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot \frac{1}{D}.$$

Al correr la regresión de Hall $\Delta c = \alpha + \gamma \Delta y^{\text{anticipado}} + \varepsilon$, un investigador que ignore las restricciones estimará $\gamma \approx \lambda > 0$ y **rechazará el PIH**. Ese sesgo tiene nombre: *exceso de sensibilidad* del consumo al ingreso corriente. Nótese que γ no mide una violación de la racionalidad, sino la fracción de la población restringida.

LECTURA ECONÓMICA

Las restricciones de liquidez reconcilian la teoría con dos hechos tercicos: el consumo responde a cambios anticipados de ingreso, y la PMC estimada varía sistemáticamente con la riqueza líquida del hogar. También rompen la agregación del problema 3: con funciones de consumo quebradas, la **distribución** de la riqueza importa para el consumo agregado, y por tanto el diseño de las transferencias —no solo su monto— determina su efecto macroeconómico.

Costo de uso del capital: arbitraje, impuestos y elasticidad de K^*

Enunciado en la página 4.

(a) Arbitraje

Comprar una unidad de capital cuesta $p_{K,t}$. Rinde un alquiler R_t y al final del período queda una fracción $(1 - \delta)$ que se puede vender a $p_{K,t+1}$. La alternativa es un bono que rinde $(1 + r)$. En equilibrio ambos deben rendir lo mismo:

$$R_t + (1 - \delta)p_{K,t+1} = (1 + r)p_{K,t}.$$

Despejando y definiendo la ganancia de capital $\pi_K \equiv (p_{K,t+1} - p_{K,t})/p_{K,t}$:

$$uc \equiv R_t = p_{K,t}(r + \delta - \pi_K) \quad (\text{a primer orden}), \quad F'(K) = uc.$$

Los tres componentes son transparentes: r es el costo de oportunidad del financiamiento, δ el desgaste físico, y $-\pi_K$ recoge que si el capital se aprecia, poseerlo es más barato.

(b) Impuestos

Con un impuesto τ sobre las utilidades y un crédito por depreciación de valor presente z por peso invertido, el costo efectivo de una unidad de capital es $p_K(1 - \tau z)$ y el rendimiento se grava a $(1 - \tau)$. Igualando después de impuestos, con $p_K = 1$ y $\pi_K = 0$:

$$uc(\tau, z) = (r + \delta) \frac{1 - \tau z}{1 - \tau}.$$

Derivando respecto de τ (regla del cociente):

$$\frac{\partial uc}{\partial \tau} = (r + \delta) \frac{-z(1 - \tau) + (1 - \tau z)}{(1 - \tau)^2} = (r + \delta) \frac{1 - z}{(1 - \tau)^2} \geq 0.$$

El impuesto a las utilidades **encarece el capital y reduce la inversión**, salvo en el caso límite $z = 1$: si el sistema tributario permite deducir de inmediato el 100% de la inversión (*expensing* inmediato), entonces $uc = r + \delta$ y el impuesto es **neutral** respecto de la decisión de inversión. El Estado se convierte en socio silencioso: se lleva τ de las utilidades pero financia τ del costo.

(c) Capital óptimo y elasticidad

$$\alpha A K^{\alpha-1} = uc \quad \implies \quad K^* = \left[\frac{\alpha A}{uc} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Tomando logaritmos, $\ln K^* = [\ln(\alpha A) - \ln uc]/(1 - \alpha)$, luego

$$\frac{d \ln K^*}{d \ln uc} = -\frac{1}{1 - \alpha} < -1.$$

La demanda de capital es siempre **elástica**. La intuición: cuánto hay que mover K para restaurar $F'(K) = uc$ depende de la velocidad con que decrece F' , y esa velocidad la mide $(1 - \alpha)$. Con $\alpha \rightarrow 1$ (rendimientos casi constantes) la elasticidad diverge; con α pequeño el capital es poco sensible a la tasa.

(d) El defecto del modelo

La condición $F'(K) = uc$ determina el **stock** óptimo K^* , pero nada penaliza la velocidad de ajuste. Si $K_0 \neq K^*$, la inversión que resuelve el problema es $I = K^* - (1 - \delta)K_0$ en el primer instante y $I = \delta K^*$ después.

En tiempo continuo esto significa un **salto instantáneo**: la tasa de inversión es infinita en un punto y δ después. Empíricamente es insostenible —la inversión agregada es suave, persistente y autocorrelacionada, y responde con rezagos largos a cambios en la tasa. El problema 9 introduce la fricción que falta.

LECTURA ECONÓMICA

El costo de uso es la traducción operativa de “la tasa de interés afecta la inversión”, y su elasticidad $-1/(1 - \alpha)$ es exactamente el parámetro que gobierna la pendiente de la curva IS del capítulo 2 y, por tanto, la potencia de la política monetaria. El resultado de neutralidad con $z = 1$ es además la base analítica de las reformas de depreciación instantánea: si se quiere gravar utilidades sin distorsionar la inversión, el instrumento es la definición de la base, no la tasa.

DESARROLLO 9

q DE TOBIN

Costos de ajuste, la ecuación de q y el teorema de Hayashi

Enunciado en la página 5.

(a) Hamiltoniano y regla de inversión

$$H = F(K) - I - \frac{\varphi}{2} \left(\frac{I}{K} \right)^2 K + q(I - \delta K),$$

donde q es la variable de coestado asociada al stock de capital: el **valor sombra de una unidad adicional de capital instalado**. La condición $\partial H / \partial I = 0$ da

$$-1 - \varphi \frac{I}{K} + q = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{I}{K} = \frac{q - 1}{\varphi}}.$$

La lectura marginalista es exacta: el costo marginal total de instalar es $1 + \varphi(I/K)$ —precio más costo de ajuste marginal— y debe igualar al beneficio marginal q .

(b) La ecuación de q

La condición de coestado es $\dot{q} = rq - \partial H / \partial K$. Como $\Phi = \frac{\varphi}{2} I^2 / K$, se tiene $\partial \Phi / \partial K = -\frac{\varphi}{2} (I/K)^2$, luego

$$\boxed{\dot{q} = (r + \delta)q - F'(K) - \frac{\varphi}{2} \left(\frac{I}{K} \right)^2}.$$

Integrando hacia adelante con la transversalidad $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(r+\delta)t} q_t = 0$:

$$q_t = \int_t^\infty e^{-(r+\delta)(s-t)} \left[F'(K_s) + \frac{\varphi}{2} \left(\frac{I_s}{K_s} \right)^2 \right] ds.$$

q es el **valor presente descontado de todo lo que aportará en el futuro** una unidad de capital instalada hoy: sus productos marginales más el ahorro de costos de ajuste que genera (una unidad extra de capital abarata invertir en el futuro). Toda la información relevante —tasas, productividad, expectativas, política tributaria— se comprime en **un solo número**.

(c) Estado estacionario

En estado estacionario $\dot{K} = 0 \Rightarrow I = \delta K \Rightarrow I/K = \delta$, y de la regla de inversión $q^* = 1 + \varphi\delta$. Con $\dot{q} = 0$ en la ecuación de coestado,

$$F'(K^*) = (r + \delta)(1 + \varphi\delta) - \frac{\varphi}{2}\delta^2.$$

Con $\delta = 0$ esto colapsa a $q^* = 1$ y $F'(K^*) = r$: se recupera exactamente la condición neoclásica del problema 8. Los costos de ajuste no cambian el *destino*, solo la *trayectoria*: con $K < K^*$ se tiene $q > q^*$ y la empresa invierte; la convergencia es gradual y su velocidad es decreciente en φ .

(d) Hayashi

El problema es que q es la q **marginal**, $\partial V/\partial K$, que no se observa. Lo que sí se observa en el mercado es la q **media**, V/K : valor de mercado de la empresa dividido por el costo de reposición de su capital.

Teorema de Hayashi (1982). Si (i) F y Φ son homogéneas de grado 1 en (K, I) —rendimientos constantes a escala— y (ii) la empresa es tomadora de precios, entonces V es homogénea de grado 1 en K y, por el teorema de Euler, $V = (\partial V/\partial K) K$, es decir $q^{\text{marginal}} = \partial V/\partial K = V/K = q^{\text{media}}$.

Las condiciones no son inocuas: con poder de mercado, con factores fijos no medidos o con capital intangible no contabilizado, V/K incorpora **rentas** que no corresponden al valor marginal del capital, y sobreestima sistemáticamente la q marginal. Esa es la explicación estándar de por qué las regresiones de inversión contra q media dan coeficientes muy bajos (φ implausiblemente altos) y residuos correlacionados con el flujo de caja.

LECTURA ECONÓMICA

La q de Tobin es un resultado de **suficiencia estadística**: en este modelo, un solo número resume todo lo que la empresa necesita saber para invertir. Eso es teóricamente elegante y empíricamente frágil, porque exige las condiciones de Hayashi para volverse observable. La sensibilidad de la inversión al flujo de caja —una vez controlado por q — es la evidencia habitual de **restricciones financieras** en la empresa, el análogo exacto de las restricciones de liquidez del hogar en el problema 7.

DESARROLLO 10**Dinámica de la deuda: solución, estabilidad y condición de solvencia**

Enunciado en la página 5.

(a) De niveles a razones del PIB

Divide la restricción del gobierno por $Y_{t+1} = (1 + g)Y_t$:

$$\frac{B_{t+1}}{Y_{t+1}} = \frac{1+r}{1+g} \cdot \frac{B_t}{Y_t} - \frac{SP_{t+1}}{Y_{t+1}} \quad \Rightarrow \quad b_{t+1} = \theta b_t - sp, \quad \theta \equiv \frac{1+r}{1+g}.$$

Restando b_t y usando $\theta - 1 = (r - g)/(1 + g)$:

$$\Delta b_{t+1} = \frac{r-g}{1+g} b_t - sp \simeq (r-g)b_t - sp,$$

que en tiempo continuo es $\dot{b} = (r - g)b - sp$. El término $(r - g)b$ es la **bola de nieve**: los intereses netos del crecimiento del denominador.

(b) Solución de la ecuación en diferencias

El punto fijo resuelve $b^* = \theta b^* - sp$:

$$b^* = \frac{sp}{\theta - 1} = \frac{sp(1+g)}{r-g}.$$

Definiendo la desviación $x_t \equiv b_t - b^*$, la ecuación se vuelve homogénea, $x_{t+1} = \theta x_t$, cuya solución es $x_t = \theta^t x_0$. Deshaciendo el cambio:

$$b_t = \theta^t (b_0 - b^*) + b^*.$$

(c) Estabilidad y superávit estabilizador

RÉGIMEN	PUNTO FIJO	DINÁMICA
$r > g$ ($\theta > 1$)	Umbral inestable	$b_0 > b^*$ implica trayectoria explosiva; $b_0 < b^*$, deuda decreciente sin límite. b^* separa las dos cuencas.
$r < g$ ($\theta < 1$)	Atractor estable	$b_t \rightarrow b^*$ desde cualquier condición inicial. Con $sp = 0$, $b^* = 0$: el crecimiento licúa la deuda sin ajuste fiscal.

Imponiendo $b_{t+1} = b_t = b$ se obtiene el superávit que mantiene la deuda constante:

$$sp^* = (\theta - 1)b = \frac{r-g}{1+g}b.$$

Tres corolarios inmediatos de estática comparativa. **(i)** sp^* es proporcional a la deuda heredada: duplicar b duplica el ajuste requerido. **(ii)** Es creciente en r y decreciente en g , con la misma magnitud $b/(1+g)$ en ambos casos. **(iii)** Si $r < g$, entonces $sp^* < 0$: se puede correr un *déficit* primario permanente y aun así estabilizar la deuda.

(d) Solvencia intertemporal

Reescribe la ecuación hacia atrás, $b_{t-1} = (b_t + sp_t)/\theta$, e itera T veces desde $t = 0$:

$$b_0 = \sum_{j=1}^T \frac{sp_j}{\theta^j} + \frac{b_T}{\theta^T}.$$

Imponiendo la condición de no-Ponzi $\lim_{T \rightarrow \infty} b_T/\theta^T = 0$:

$$b_0 = \sum_{j \geq 1} \frac{sp_j}{\theta^j}.$$

La deuda actual debe igualar el valor presente de todos los superávits primarios futuros, descontados a la tasa ajustada por crecimiento θ .

El punto sutil: si $r < g$ entonces $\theta < 1$ y $\theta^{-T} \rightarrow \infty$. La condición de no-Ponzi deja de ser una restricción operativa —el gobierno puede refinanciar indefinidamente— y la serie de la derecha no converge para superávits constantes. La “restricción presupuestaria intertemporal” del gobierno solo tiene mordida cuando $r > g$.

Advertencia final, y es la más importante: r no es exógeno. Si $r = r(b)$ con $r'(b) > 0$ —prima por riesgo creciente en la deuda— entonces θ depende de b , la ecuación deja de ser lineal y pueden aparecer **múltiples puntos fijos**: uno de deuda baja y tasa baja, otro de deuda alta y tasa alta, ambos autoconsistentes.

LECTURA ECONÓMICA

La sostenibilidad fiscal no depende del *nivel* de deuda sino del signo de $r - g$ y de la capacidad política de generar sp^* . Y como r responde a las expectativas de solvencia, el sistema admite profecías autocumplidas: una revisión de expectativas mueve r , que mueve θ , que puede convertir una trayectoria estable en explosiva sin que ningún fundamento real haya cambiado. Ese mecanismo de equilibrios múltiples es el vínculo directo con el problema de credibilidad de Barro–Gordon del capítulo 11.

Notación y numeración siguen el apunte *Análisis macroeconómico intermedio* (M. Villena, UTFSM, 2025). Los problemas 1–4 corresponden al entorno de la Figura 7.1; el problema 10, a la sección 7.6. Existen versiones interactivas en HTML de estos ejercicios, además de un set paralelo con valores numéricos.