

Cuando el futuro es incierto: la Euler estocástica y el precio del riesgo

Del consumo a los precios de los activos: el factor estocástico de descuento, el CCAPM y por qué el riesgo que importa es el que llega en los malos momentos.

Fernando Greve

fernando.greve@usm.cl · www.fernandogreve.com

Macroeconomía II · ICOM UTFSM · 29 de agosto de 2026 · Basado en las *Notas de Macroeconomía Intermedia* (Villena, 2025), capítulo 8.

1. ¿Por qué incertidumbre? De Fisher al mundo real

En el capítulo 7 el hogar de Fisher elegía entre consumir hoy o mañana en un mundo *determinístico*: sabía exactamente cuánto iba a ganar y cuánto rendía su ahorro. Ese mundo es útil para entender la lógica de la suavización del consumo, pero le falta el ingrediente central de la vida económica real: **el futuro es incierto**. El ingreso, la productividad, la inflación y los retornos de los activos son, vistos desde hoy, variables aleatorias.

La revolución de la macroeconomía desde fines de los años setenta —liderada por Robert Lucas (expectativas racionales) y conectada a las finanzas por Douglas Breeden (el *Consumption CAPM* o CCAPM)— consistió en tomar en serio esa incertidumbre: los agentes forman expectativas usando toda la información disponible y deciden mirando hacia el futuro. Ese lenguaje es la base de los modelos DSGE (RBC y Nuevo Keynesianos) que veremos más adelante.

INTUICIÓN ECONÓMICA

La pregunta de este capítulo cabe en una frase: *¿cuánto vale hoy una promesa de pago incierta?* La respuesta del CCAPM es sorprendentemente simple: depende de *cuándo* paga. Un peso que llega en una recesión —cuando estás apretado— vale más que un peso que llega en un auge, cuando ya tienes de sobra. Los precios de los activos reflejan esa asimetría.

Este capítulo hace dos cosas: (i) deriva la condición de optimalidad del consumidor bajo incertidumbre —la **ecuación de Euler estocástica**— y muestra que ella es, al mismo tiempo, una **fórmula de valoración de activos**; y (ii) explica por qué este marco es el puente hacia la macroeconomía dinámica moderna.

2. El ambiente: activos, precios y retornos

Consideremos dos fechas, t y $t + 1$. Un activo financiero se describe con dos números:

- su **precio hoy**, P_t (conocido), y
- su **pago mañana**, X_{t+1} (aleatorio visto desde t : puede ser un dividendo, un cupón, el valor de reventa...).

El **retorno bruto** del activo es simplemente cuánto recibes por cada peso invertido:

$$R_{t+1} \equiv \frac{X_{t+1}}{P_t}. \quad (1)$$

Además existe un **activo libre de riesgo** que paga un retorno bruto R_t^f conocido de antemano (piense en un depósito a plazo o un bono del tesoro a un período).

3. El problema del hogar bajo incertidumbre

Un hogar representativo vive dos períodos: $t = 1$ (presente) y $t = 2$ (futuro). En el período 2 el ingreso es aleatorio: depende de si la economía cae en recesión o entra en auge. El hogar maximiza su **utilidad esperada**:

$$\max_{C_1, a} u(C_1) + \beta \mathbb{E}_1[u(C_2)], \quad (2)$$

donde $u' > 0$ y $u'' < 0$ (más consumo es mejor, pero cada unidad adicional aporta menos), $\beta \in (0, 1)$ es la impaciencia y $\mathbb{E}_1[\cdot]$ es la expectativa con la información disponible en el período 1.

Restricciones presupuestarias

En el período 1 el hogar recibe una dotación Y_1 y decide cuánto consumir y cuántas unidades a del activo comprar a precio P_1 :

$$C_1 + P_1 a = Y_1. \quad (3)$$

En el período 2 consume su dotación futura Y_2 (aleatoria) más lo que pague el activo:

$$C_2 = Y_2 + a X_2. \quad (4)$$

Despejando $a = (Y_1 - C_1)/P_1$ de (3) y sustituyendo en (4):

$$C_2 = Y_2 + \left(\frac{Y_1 - C_1}{P_1} \right) X_2. \quad (5)$$

Es la versión estocástica de la restricción intertemporal de Fisher: cada peso no consumido hoy se transforma en $X_2/P_1 = R_2$ pesos mañana, pero ahora ese “tipo de cambio” entre presente y futuro es *incierto*.

Derivación paso a paso de la Euler estocástica

Paso 1 (sustituir la restricción). Metemos (5) en la función objetivo, de modo que el problema queda en una sola variable, C_1 :

$$\max_{C_1} u(C_1) + \beta \mathbb{E}_1 \left[u \left(Y_2 + \frac{Y_1 - C_1}{P_1} X_2 \right) \right].$$

Paso 2 (condición de primer orden). Derivamos respecto a C_1 e igualamos a cero. Consumir un peso extra hoy da $u'(C_1)$; el costo es dejar de comprar $1/P_1$ unidades del activo, que mañana habrían pagado X_2 , valoradas a la utilidad marginal futura:

$$u'(C_1) - \beta \mathbb{E}_1 \left[u'(C_2) \frac{X_2}{P_1} \right] = 0. \quad (6)$$

Paso 3 (reordenar). Usando la definición de retorno bruto $R_2 = X_2/P_1$:

$$u'(C_1) = \beta \mathbb{E}_1[u'(C_2) R_2] \quad (\text{ecuación de Euler estocástica}) \quad (7)$$

INTUICIÓN ECONÓMICA

En el óptimo, el hogar está *indiferente en el margen*: el placer de consumir un peso más hoy, $u'(C_1)$, es exactamente igual al placer esperado de ahorrarlo: recibir R_2 pesos mañana, valorados con la utilidad marginal futura $u'(C_2)$ y descontados por impaciencia β . La única diferencia con Fisher es el operador $\mathbb{E}_1$: como mañana es incierto, el hogar promedia sobre los estados de la naturaleza, ponderando por sus probabilidades. La clave es que dentro de la expectativa aparece el *producto* $u'(C_2)R_2$: no solo importa cuánto rinde el activo en promedio, sino *en qué estados* rinde.

4. El factor estocástico de descuento (SDF)

Definamos el **factor estocástico de descuento** (SDF, también llamado *kernel de precios*) como la tasa marginal de sustitución intertemporal:

$$m_2 \equiv \beta \frac{u'(C_2)}{u'(C_1)}. \quad (8)$$

Es un “tipo de cambio subjetivo” entre pesos de mañana y pesos de hoy, que varía según el estado de la naturaleza. Dividiendo (7) por $u'(C_1)$ obtenemos la forma canónica:

$$1 = \mathbb{E}_1[m_2 R_2] \quad \Longleftrightarrow \quad P_1 = \mathbb{E}_1[m_2 X_2]. \quad (9)$$

La segunda igualdad (sustituyendo $R_2 = X_2/P_1$) es la **fórmula fundamental de valoración**: *el precio de cualquier activo es el valor esperado de sus pagos futuros, descontados estado a estado por m_2* .

¿POR QUÉ m ES ALTO EN RECESIONES?

El SDF hereda la forma de la utilidad marginal. En una recesión el consumo C_2 es bajo y, como $u'' < 0$, la utilidad marginal $u'(C_2)$ es *alta*: cada peso extra se aprecia muchísimo cuando se está apretado. Por eso m_2 es alto en los malos estados y bajo en los buenos. Consecuencia directa de (9): el mercado paga precios *mayores* por activos que entregan sus pagos justamente en los momentos de escasez. Es la misma razón por la que un paraguas vale más cuando llueve: no por el paraguas, sino por el estado del mundo en que lo recibes.

Comparación con el capítulo 7. En el mundo determinístico descontábamos todos los flujos con el mismo factor $1/(1+r)$. Bajo incertidumbre, cada *estado* tiene su propio factor de descuento m_2 : los pagos en recesión se descuentan poco (valen mucho) y los pagos en auge se descuentan fuerte (valen poco). El valor presente descontado del capítulo 7 es el caso particular de (9) sin incertidumbre.

5. La tasa libre de riesgo

Para el activo libre de riesgo, $R_2 = R^f$ es una constante conocida, así que sale de la expectativa en (9):

$$1 = \mathbb{E}_1[m_2] R^f \quad \Rightarrow \quad R^f = \frac{1}{\mathbb{E}_1[m_2]}. \quad (10)$$

INTUICIÓN ECONÓMICA

La tasa libre de riesgo es el inverso del SDF *esperado*. Dos fuerzas la gobiernan: (i) la **impaciencia** β —hogares más impacientes exigen más retorno para posponer consumo, subiendo R^f — y (ii) el **ahorro precautorio**: si el futuro es muy incierto, los hogares quieren ahorrar “por si acaso”, lo que abarata el financiamiento y *baja* R^f . Esta segunda fuerza está detrás del llamado *puzzle de la tasa libre de riesgo*.

6. Primas por riesgo: la forma de covarianza

Apliquemos la identidad estadística $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \text{Cov}(X, Y)$ a la condición $1 = \mathbb{E}_t[m_{t+1}R_{t+1}]$:

$$1 = \mathbb{E}_t[m_{t+1}] \mathbb{E}_t[R_{t+1}] + \text{Cov}_t(m_{t+1}, R_{t+1}).$$

Reordenando y usando $R_t^f = 1/\mathbb{E}_t[m_{t+1}]$:

$$\underbrace{\mathbb{E}_t[R_{t+1}] - R_t^f}_{\text{prima por riesgo}} = - \frac{\text{Cov}_t(m_{t+1}, R_{t+1})}{\mathbb{E}_t[m_{t+1}]} \quad (11)$$

Esta ecuación es el corazón del CCAPM. Léala con calma:

- **Activo procíclico** (acciones): paga bien en auges (cuando m es bajo) y mal en recesiones (cuando m es alto) $\Rightarrow \text{Cov}(m, R) < 0 \Rightarrow$ **prima positiva**. Te abandona justo cuando más lo necesitas; para que alguien lo compre, debe prometer un retorno esperado mayor.
- **Seguro macroeconómico** (bonos del tesoro, oro): paga bien —o parejo— en recesiones $\Rightarrow \text{Cov}(m, R) \geq 0 \Rightarrow$ **prima baja o negativa**. Los inversionistas aceptan sacrificar retorno a cambio de protección en los malos tiempos.

INTUICIÓN ECONÓMICA

El mensaje central del CCAPM: **el riesgo que se paga no es la volatilidad aislada de un activo, sino su covarianza con la utilidad marginal del consumo**. Un activo puede ser muy volátil y aun así no exigir prima, si sus vaivenes no están correlacionados con el ciclo (ese riesgo se diversifica). Lo que no se puede diversificar es el riesgo de que *toda* la economía caiga: quien carga con él en su portafolio cobra por hacerlo.

7. CCAPM con utilidad CRRA

La especificación estándar es la utilidad de aversión relativa al riesgo constante (CRRA):

$$u(C) = \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma}, \quad \sigma > 0, \quad \Rightarrow \quad u'(C) = C^{-\sigma}. \quad (12)$$

Sustituyendo en la definición del SDF:

$$m_{t+1} = \beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\sigma}. \quad (13)$$

En logaritmos, con $g_{t+1} \equiv \Delta \ln C_{t+1}$ (el crecimiento del consumo):

$$\ln m_{t+1} = \ln \beta - \sigma g_{t+1}. \quad (14)$$

INTUICIÓN ECONÓMICA

Con CRRA, el SDF depende de una sola cosa observable: **el crecimiento del consumo**. Si el consumo va a crecer mucho (g alto), mañana serás “rico” y valoras poco los pesos futuros: m bajo. Si el consumo va a caer, m es alto. El parámetro σ amplifica la sensibilidad: mide cuánto “duele” la variabilidad del consumo. Esta forma log-lineal (14) es la que usan los modelos DSGE al aproximar alrededor del estado estacionario.

Ejemplo resuelto: un CCAPM de dos estados

Sea $\sigma = 2$ y $\beta = 0,98$, de modo que $m_2 = \beta(C_2/C_1)^{-2}$. Mañana hay dos estados igualmente probables: *bueno*, con crecimiento del consumo $C_2/C_1 = 1,04$, y *malo*, con $C_2/C_1 = 0,98$.

SDF y tasa libre de riesgo.

$$m_{\text{bueno}} = 0,98 (1,04)^{-2} = 0,906, \quad m_{\text{malo}} = 0,98 (0,98)^{-2} = 1,020,$$

$$\mathbb{E}[m] = \frac{1}{2}(0,906 + 1,020) = 0,963 \quad \Rightarrow \quad R^f = \frac{1}{0,963} = 1,038,$$

es decir, una tasa libre de riesgo de $\approx 3,8\%$.

Un activo procíclico. Considere un activo que paga 1,15 en el estado bueno y 0,90 en el malo. Su precio es

$$P_0 = \mathbb{E}[mX] = \frac{1}{2}(0,906 \times 1,15) + \frac{1}{2}(1,020 \times 0,90) = 0,980,$$

con retornos $R_{\text{bueno}} = 1,15/0,980 = 1,173$ y $R_{\text{malo}} = 0,90/0,980 = 0,918$, y retorno esperado $\mathbb{E}[R] = 1,046$. La prima por riesgo es

$$\mathbb{E}[R] - R^f \approx 0,76\%,$$

positiva porque el activo paga mal justo cuando el SDF es alto: $\text{Cov}(m, R) < 0$.

INTUICIÓN ECONÓMICA

Fíjese en lo *pequeña* que resulta la prima (0,76%) con un σ perfectamente razonable. En los datos, la prima accionaria histórica de EE.UU. ronda el 6% anual. Ese contraste entre la aritmética del modelo y la evidencia es, exactamente, el *equity premium puzzle* de la sección siguiente.

8. Los puzzles: donde el modelo simple se queda corto**El equity premium puzzle**

Mehra y Prescott (1985) documentaron que las acciones estadounidenses han pagado históricamente una prima cercana al 6% anual sobre el activo libre de riesgo. El problema del CCAPM con CRRA es cuantitativo: **el consumo agregado es demasiado suave**. Como el consumo varía poco, la covarianza entre m y los retornos es pequeña, y la ecuación (11) solo genera primas grandes si σ toma valores implausiblemente altos (aversión al riesgo extrema que nadie exhibe en otras decisiones).

INTUICIÓN ECONÓMICA

El benchmark falla en la *magnitud*, pero su *estructura* es correcta y esa es la lección que hay que llevarse: el precio del riesgo proviene de covarianzas con la utilidad marginal, no de volatilidades aisladas. El fracaso cuantitativo motivó un gran programa de investigación que *enriquece el SDF* sin abandonar la lógica: **hábitos** (la aversión efectiva sube en recesiones porque consumir cerca del hábito “duele” más), **desastres raros** (una pequeña probabilidad de caídas catastróficas del consumo eleva mucho el precio del riesgo), **riesgo de largo plazo** (componentes persistentes en el crecimiento del consumo) y **heterogeneidad con mercados incompletos** (el riesgo relevante no lo captura el consumo del agente representativo).

Predictibilidad y primas contracíclicas

Durante décadas se pensó que los retornos eran impredecibles (paseo aleatorio). La evidencia moderna (Shiller, Cochrane) muestra otra cosa: **los retornos esperados varían en el tiempo y son contracíclicos**: la prima exigida es altísima en el fondo de una recesión y muy baja en la cima del auge.

EL SDF EXPLICA LA VOLATILIDAD DE LA BOLSA

En una recesión el consumo cae y $u'(C_t)$ se dispara: los hogares tienen “hambre de liquidez”. Para convencer a un inversionista asustado de que no venda sus acciones y compre pan hoy, el mercado debe ofrecerle un retorno esperado enorme mañana. ¿Cómo se logra eso? Con un *colapso del precio hoy*: $P_t \downarrow$ para que $R_{t+1} \uparrow$. Gran parte de la volatilidad bursátil no refleja cambios en los dividendos futuros de las empresas, sino cambios en la **tasa de descuento macroeconómica** m_{t+1} , movida por el ciclo y el apetito por riesgo. El índice VIX, que se dispara en cada recesión, es la fotografía de ese precio contracíclico del riesgo.

9. El puente hacia los modelos DSGE

En los modelos RBC y Nuevo Keynesianos, el bloque del hogar siempre produce una condición del tipo

$$1 = \mathbb{E}_t[m_{t+1}R_{t+1}],$$

y el resto del modelo especifica cómo los shocks (productividad, preferencias, política monetaria) mueven C_{t+1} , R_{t+1} y, por ende, precios y primas. Dos adelantos concretos:

- **Ramsey (capítulo 9)**: el mismo principio genera la Euler de acumulación de capital, donde el retorno relevante es el producto marginal esperado del capital más su valor de reventa.
- **Nuevo Keynesiano**: la Euler del consumo se convierte en la *IS dinámica*, y la política monetaria opera moviendo el retorno real relevante vía la tasa nominal y las expectativas de inflación.

El CCAPM no es solo un modelo de finanzas: es el *lenguaje* con que la macroeconomía moderna organiza la transmisión de shocks y políticas a través del consumo y la utilidad marginal.

10. Síntesis

CONCEPTO	FÓRMULA CLAVE	INTUICIÓN EN UNA LÍNEA
Euler estocástica	$u'(C_1) = \beta \mathbb{E}_1[u'(C_2)R_2]$	Indiferencia marginal entre consumir hoy y ahorrar con retorno incierto.
SDF (kernel de precios)	$m_2 = \beta u'(C_2)/u'(C_1)$	Tipo de cambio entre estados: alto en recesión, bajo en auge.
Valoración fundamental	$P_1 = \mathbb{E}_1[m_2 X_2]$	Los pagos en malos tiempos valen más.
Tasa libre de riesgo	$R^f = 1/\mathbb{E}[m]$	Impaciencia sube R^f ; ahorro precautorio la baja.
Prima por riesgo	$\mathbb{E}[R] - R^f = -\text{Cov}(m, R)/\mathbb{E}[m]$	Se paga la covarianza con el ciclo, no la volatilidad.
SDF con CRRA	$m_{t+1} = \beta(C_{t+1}/C_t)^{-\sigma}$	Todo se reduce al crecimiento del consumo.

11. Ejercicios conceptuales

1. SDF y el ciclo económico. Explique por qué el factor estocástico de descuento (m_{t+1}) toma valores altos durante las recesiones y bajos durante las expansiones.

SOLUCIÓN

El SDF depende de la razón de utilidades marginales $u'(C_{t+1})/u'(C_t)$. Como la utilidad marginal es decreciente, en una recesión el consumo cae y la utilidad marginal de una unidad extra de consumo se vuelve muy elevada: las personas valoran enormemente la liquidez en tiempos de crisis, y por eso m_{t+1} es alto. En expansión ocurre lo contrario: abunda el consumo, la utilidad marginal cae y el SDF es bajo.

2. Prima de riesgo y seguro macroeconómico. ¿Por qué un activo procíclico (como el mercado accionario general) requiere pagar una prima de riesgo alta, mientras que un bono del tesoro (o el oro) no?

SOLUCIÓN

Un activo procíclico rinde mucho en expansiones (cuando el consumo es alto y m es bajo) y rinde poco o da pérdidas en recesiones (cuando el consumo es escaso y m es altísimo): su pago tiene covarianza *negativa* con el SDF. Abandona al inversionista cuando más lo necesita, así que para que alguien lo compre debe prometer un retorno esperado sustancialmente mayor (prima alta). Un bono del tesoro paga lo mismo sin importar el estado: actúa como seguro macroeconómico y su prima es nula o baja.

12. Ejercicios numéricos

3. Cálculo del SDF. El hogar tiene utilidad logarítmica ($u(C) = \ln C$) y $\beta = 0,96$. El consumo en t es 100. En $t + 1$ la economía puede entrar en expansión (prob. 50%, consumo = 105) o recesión (prob. 50%, consumo = 95). Calcule el SDF en cada estado.

SOLUCIÓN

Con utilidad logarítmica, $u'(C) = 1/C$. En expansión:

$$m_{\text{exp}} = \beta \frac{u'(105)}{u'(100)} = 0,96 \times \frac{100}{105} \approx 0,914.$$

En recesión:

$$m_{\text{rec}} = \beta \frac{u'(95)}{u'(100)} = 0,96 \times \frac{100}{95} \approx 1,011.$$

Note que $m_{\text{rec}} > 1$: un peso en la recesión de mañana vale *más* que un peso hoy, a pesar de la impaciencia.

4. Precio de un bono libre de riesgo. Con el SDF del ejercicio 3, calcule el precio hoy (P_t) y el retorno (R_t^f) de un bono que paga exactamente 1 en cualquier estado.

SOLUCIÓN

El pago es $X = 1$ en ambos estados, así que el precio es el SDF esperado:

$$P_t = \mathbb{E}_t[m_{t+1} \times 1] = 0,5 (0,914) + 0,5 (1,011) \approx 0,962.$$

El retorno bruto es $R_t^f = 1/P_t = 1/0,962 \approx 1,0395$, una tasa libre de riesgo del 3,95%.

5. Precio de un activo riesgoso. En la misma economía, una acción paga dividendos atados al ciclo: \$120 en expansión y \$80 en recesión. Calcule su precio hoy.

SOLUCIÓN

Usamos la fórmula fundamental $P_t = \mathbb{E}_t[m_{t+1} X_{t+1}]$:

$$P_t = 0,5 (0,914 \times 120) + 0,5 (1,011 \times 80) = 0,5 (109,68) + 0,5 (80,84) \approx 95,26.$$

Observe que el pago esperado es $\mathbb{E}[X] = 100$, pero el precio es *menor* que $100/R^f \approx 96,2$ (el valor que tendría un pago seguro de 100): el mercado castiga a la acción por pagar poco justo en el estado malo.

6. Prima por riesgo. Calcule el retorno esperado de la acción del ejercicio 5 y su prima por riesgo respecto al activo libre de riesgo.

SOLUCIÓN

El pago esperado es $\mathbb{E}[X] = 0,5(120) + 0,5(80) = 100$, de modo que

$$\mathbb{E}[R_{\text{acción}}] = \frac{\mathbb{E}[X]}{P_t} = \frac{100}{95,26} \approx 1,0498 \quad (\approx 4,98\%).$$

La prima por riesgo es

$$\mathbb{E}[R_{\text{acción}}] - R_t^f \approx 1,0498 - 1,0395 = 0,0103,$$

es decir, alrededor de 1%. Los inversionistas exigen este exceso de retorno porque la acción paga poco cuando más se necesita (en recesión): es la ecuación (11) en acción, con $\text{Cov}(m, R) < 0$.

Notas de clase basadas en el capítulo 8 de las *Notas de Macroeconomía Intermedia* (Villena, 2025). Referencias clásicas: Breeden (1979) para el CCAPM; Mehra y Prescott (1985) para el equity premium puzzle; Cochrane (2005), *Asset Pricing*, para el tratamiento moderno del SDF.