

Macroeconomía II · ICOM — Universidad Técnica Federico Santa María

Profesor: Fernando Greve

Quiz 2 — Consumo bajo incertidumbre y valoración de activos

Módulo II · Capítulo 8. Euler estocástica, factor de descuento estocástico, CCAPM y primas por riesgo.

Duración: 1 hora 15 minutos. Puntaje total: 100 puntos. Se permite calculadora simple. Redondee a cuatro decimales cuando corresponda.

Nombre: _____ **Rol:** _____

1. Derivación de la Ecuación de Euler estocástico. Considere el problema del hogar en dos períodos con incertidumbre visto en clases. Asuma una función de utilidad general $u(c)$. El hogar puede comprar a unidades a un precio P_1 de un activo que paga X_2 en el segundo periodo. Asuma consumo C_1, C_2 y Y_1, Y_2 el consumo e ingreso de los periodos respectivos y β . (40 ptos)

- (a) Especifique el problema del hogar (ecuación a maximizar y 2 restricciones). **Hint:** las variables de decisión son C_1, a .
- (b) Resuelva el problema de optimización y encuentre la ecuación de Euler estocástica.
- (c) Considere el Factor estocástico de descuento $m_2 \equiv \beta \frac{u'(C_2)}{u'(C_1)}$ y el retorno del activo $R_2 \equiv \frac{X_2}{P_1}$. Defina una fórmula de valorización del activo P_1 a partir de la ecuación de Euler estocástica.
- (d) Encuentre una fórmula para el activo libre de riesgo R^f . **Hint:** El activo libre de riesgo en el periodo 2 es conocido en el periodo 1.
- (e) Demuestre que $E[XY] = E[X]E[Y] + Cov(X, Y)$ para todo par de variables aleatorias X, Y . Evalúe su resultado en m_2 y R_2 para llegar a una ecuación de la prima por riesgo $E[R_2] - R^f$.

SOLUCIÓN.

- (a) El hogar elige cuánto consumir hoy y cuántas unidades del activo comprar, (C_1, a) , para maximizar su utilidad esperada sujeto a una restricción por período:

$$\max_{C_1, a} u(C_1) + \beta \mathbb{E}_1[u(C_2)] \quad \text{s. a.} \quad C_1 + P_1 a = Y_1, \quad C_2 = Y_2 + aX_2$$

La primera restricción reparte la dotación de hoy entre consumo y compra del activo; la segunda dice que el consumo de mañana es la dotación futura (aleatoria) más el pago del activo. Como Y_2 y X_2 dependen del estado de la naturaleza, C_2 es una variable aleatoria y por eso aparece el operador $\mathbb{E}_1$, la esperanza condicional a la información del período 1.

- (b) Despejando $a = (Y_1 - C_1)/P_1$ de la primera restricción y sustituyendo en la segunda se obtiene la restricción intertemporal estocástica $C_2 = Y_2 + \frac{Y_1 - C_1}{P_1} X_2$.

El problema queda sin restricciones en C_1 . La condición de primer orden es

$$u'(C_1) + \beta \mathbb{E}_1 \left[u'(C_2) \cdot \left(-\frac{X_2}{P_1} \right) \right] = 0$$

(equivalentemente, con el Lagrangiano $\mathcal{L} = u(C_1) + \beta \mathbb{E}_1[u(Y_2 + aX_2)] + \lambda(Y_1 - C_1 - P_1 a)$ las CPO son $u'(C_1) = \lambda$ y $\beta \mathbb{E}_1[u'(C_2)X_2] = \lambda P_1$). Reordenando y usando $R_2 = X_2/P_1$:

$$u'(C_1) = \beta \mathbb{E}_1[u'(C_2)R_2]$$

Esta es la ecuación de Euler estocástica. Interpretación: en el óptimo el hogar es indiferente entre consumir una unidad hoy (utilidad marginal $u'(C_1)$) o invertirla en el activo y consumir mañana su retorno incierto R_2 , cuyo valor en utilidad se pondera estado a estado por la utilidad marginal futura, por la probabilidad de cada estado y por la impaciencia β .

- (c) Dividiendo la Euler por $u'(C_1)$ y usando la definición del factor estocástico de descuento $m_2 \equiv \beta \frac{u'(C_2)}{u'(C_1)}$:

$$1 = \mathbb{E}_1[m_2 R_2]$$

Sustituyendo $R_2 = X_2/P_1$ y sacando P_1 de la esperanza (es conocido en el período 1):

$$P_1 = \mathbb{E}_1[m_2 X_2]$$

El precio de cualquier activo es el valor esperado de sus pagos descontados estado a estado por m_2 . Como m_2 es alto en los estados de bajo consumo (utilidad marginal alta), el mercado paga más por los activos que rinden bien en las recesiones.

- (d) Para el activo libre de riesgo el retorno R^f es conocido en el período 1, de modo que sale fuera de la esperanza en $1 = \mathbb{E}_1[m_2 R^f]$:

$$1 = \mathbb{E}_1[m_2] R^f \Rightarrow R^f = \frac{1}{\mathbb{E}_1[m_2]}$$

La tasa libre de riesgo es el inverso del SDF esperado: sube cuando el hogar es más impaciente (menor β) o cuando espera un consumo futuro alto respecto del actual (menor $u'(C_2)/u'(C_1)$).

- (e) Por definición, $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$. Expandiendo el producto y usando la linealidad de la esperanza:

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

luego $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \text{Cov}(X, Y)$. Aplicada a $1 = \mathbb{E}_1[m_2 R_2]$:

$$1 = \mathbb{E}_1[m_2]\mathbb{E}_1[R_2] + \text{Cov}(m_2, R_2)$$

Dividiendo por $\mathbb{E}_1[m_2] = 1/R^f$ y reordenando:

$$\mathbb{E}_1[R_2] - R^f = -\frac{\text{Cov}(m_2, R_2)}{\mathbb{E}_1[m_2]} = -R^f \text{Cov}(m_2, R_2)$$

La prima por riesgo depende solo de la covarianza del retorno con el SDF, no de su varianza. Un activo que paga bien en recesión (cuando m_2 es alto) tiene covarianza positiva y prima baja o negativa: es un seguro. Un activo procíclico tiene covarianza negativa y debe ofrecer una prima positiva para que alguien lo mantenga. (Puntaje sugerido: 8 + 10 + 8 + 6 + 8.)

2. Valoración en un mundo de dos estados. El consumo hoy es $C_1 = 100$. Mañana hay dos estados: expansión ($C_2 = 110$) con probabilidad 0,6 y recesión ($C_2 = 95$) con probabilidad 0,4. La utilidad es logarítmica y $\beta = 0,97$. (40 pts)

- (a) Derive el SDF y calcule m en cada estado. Interprete el ordenamiento.
- (b) Calcule $\mathbb{E}[m]$ y la tasa bruta libre de riesgo R^f .
- (c) Un activo paga 100 en expansión y 80 en recesión. Calcule su precio.
- (d) Calcule su retorno esperado y la prima por riesgo. Verifique el signo de $\text{Cov}(m, X)$.

SOLUCIÓN.

- (a) Con $u(C) = \ln C$ se tiene $m_2 = \beta C_1/C_2$:

$$m^{exp} = 0,97 \frac{100}{110} = 0,8818, \quad m^{rec} = 0,97 \frac{100}{95} = 1,0211$$

El SDF es contracíclico: un peso vale más en el estado de bajo consumo, donde la utilidad marginal es más alta.

- (b) $\mathbb{E}[m] = 0,6(0,8818) + 0,4(1,0211) = 0,9375$, luego $R^f = 1/0,9375 = 1,0667$ (6,67% real).
- (c) $P = \mathbb{E}[mX] = 0,6(0,8818)(100) + 0,4(1,0211)(80) = 52,91 + 32,67 = 85,58$.
- (d) $\mathbb{E}[X] = 92$, luego $\mathbb{E}[R] = 92/85,58 = 1,0750$ y la prima es $1,0750 - 1,0667 = 0,0083$ (0,83%). Verificación: $\mathbb{E}[m]\mathbb{E}[X] = 86,25 > 85,58 = P$, de modo que $\text{Cov}(m, X) = -0,67 < 0$. El activo es procíclico: paga poco cuando más se necesita, y por eso se transa con descuento.

3. Razonar con el SDF. Tres preguntas de signo. La destreza que se evalúa es decidir el signo de una covarianza antes de calcular nada. (20 pts)

- a) Un seguro de desempleo paga exactamente cuando la persona pierde su trabajo. ¿Es su covarianza con el SDF positiva o negativa? ¿Su retorno esperado será mayor o menor que la tasa libre de riesgo?

- b) Un activo tiene una desviación estándar de retorno de 40% anual, pero no tiene ninguna correlación con el ciclo económico. ¿Qué prima por riesgo exige el CCAPM?
- c) El oro tiende a subir durante crisis financieras profundas. Según la teoría, ¿debería ofrecer un retorno esperado alto o bajo en el largo plazo? ¿Se condice con la evidencia que usted conoce?

SOLUCIÓN.

- a) **Positiva.** El seguro paga en los estados de bajo consumo, donde la utilidad marginal y por tanto m son altos, así que $\text{Cov}(m, X) > 0$. Su precio $P = \mathbb{E}[m]\mathbb{E}[X] + \text{Cov}(m, X)$ queda por sobre el valor presente actuarial $\mathbb{E}[X]/R^f$, de modo que su retorno esperado es inferior a R^f (prima negativa). Los seguros son caros por diseño: se paga por recibir dinero cuando más se necesita.
- b) **Ninguna.** Con $\text{Cov}(m, R) = 0$ se obtiene $\mathbb{E}[R] = R^f$, por muy volátil que sea el activo. El riesgo idiosincrático no se remunera porque se diversifica; el CCAPM solo paga por la covarianza con el consumo agregado.
- c) **Bajo.** El oro es una cobertura: sube en las crisis, cuando m es alto, luego $\text{Cov}(m, R) > 0$ y debe rendir poco en promedio. La evidencia de largo plazo es consistente: el oro rinde cerca de la tasa real libre de riesgo, muy por debajo de las acciones.